پاسخ تشریحی کوییز شماره ی ۲۲

ریاضی عمومی ۱و۲

استاد شکرزاد

تست ۱

(۴)

$$\tau = \frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|^{2}}$$

$$R(t) = (e^{t}, e^{-t}, \sqrt{2}\,t) \Rightarrow v(t) = (e^{t}, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow a(t) = (e^{t}, e^{-t}, 0) \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = (e^{t}, -e^{-t}, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(0) = (1,-1,\sqrt{2}) \\ \vec{a}(0) = (1,1,0) \\ \frac{d\vec{a}}{dt}(0) = (1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{a} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2+2+4}\right)^{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

تست ۲

(۳)

منظور از شعاع انحنا، معکوس مقدار انحنا است که از فرمول $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^{2})^{3/2}}$ به دست می‌آید

$$\xrightarrow{\text{مشتق اول}} 4x^{3} - 4y^{3}y' + 3x^{2} - 3y^{2}y' + 2x - 2yy' + y' = 0 \xrightarrow[x=y=0]{\text{در مبدا}} y'(0,0) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق دوم}} 12x^{2} - 12y^{2}y'^{2} - 4y^{3}y'' + 6x - 6yy'^{2} - 3y^{2}y'' + 2 - 2y'^{2} - 2yy'' + y'' = 0$$

$$\xrightarrow[x=y=y'=0]{\text{در مبدا}} y''(0) = -2 \Rightarrow \kappa = \frac{|-2|}{(1+0^{2})^{3/2}} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}$$

تست ۳

(۴)

ابتدا فرم منحنی را در فرمت دکارتی بررسی کنیم.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t = \cos^{2}t - \sin^{2}t \\ z = \sin t \end{cases} \Rightarrow y = x^{2} - z^{2}$$

رویه فوق یک سهمی‌گون هذلولی است.

تست ۴

(۱)

با توجه به فرم استوانه‌ای $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ ، منحنی مورد سؤال به فرم $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ یا $x^2 + y^2 = 4$ تبدیل شده برای $z = t$ که یک مارپیچ استوانه‌ای است چون که z متغیر بوده و با تغییرات t نوسان دارد.

تست ۵

(۲)

شعاع دایره بوسان عکس انحنا منحنی است که برای منحنی‌های دکارتی از فرمول زیر بدست می‌آید

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 2x - \cos x \\ y'' = 2 + \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0,0) = -1 \\ y''(0,0) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2}{(1+(-1)^2)^{3/2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{K} = \sqrt{2}$$